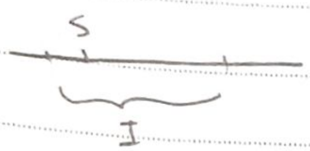
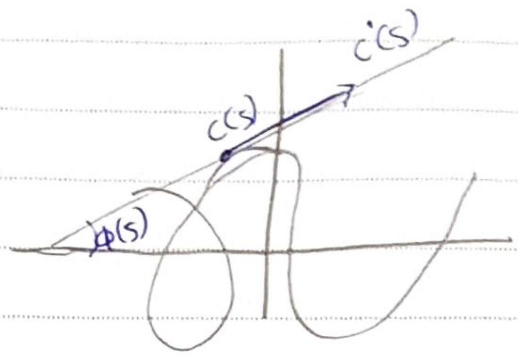
4º μάθημα
18/10/201

Καμπυλότητα

$c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$





$c(s) = (x(s), y(s))$ $\qquad$ $\dot{c}(s) = (\cos\phi(s), \sin\phi(s))$

$\dot{c}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$

$\|\dot{c}(s)\| = 1 \iff (\dot{x}(s))^2 + (\dot{y}(s))^2 = 1$

$\dot{c}$

Λήμμα

$f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^1 τέτοιες ώστε $f^2(t) + g^2(t) = 1$, $t_0 \in I$

$\phi_0 : f(t_0) = \cos\phi_0$, $g(t_0) = \sin\phi_0$ τότε υπάρχει C^1 συνάρτηση $\phi: I \to \mathbb{R}$

ώστε $\begin{cases} \phi(t_0) = \phi_0 \\ f(t) = \cos\phi(t), \quad g(t) = \sin\phi(t) \end{cases}$

$f(t) = \cos\tilde{\phi}(t)$ $\qquad$ $g(t) = \sin\tilde{\phi}(t)$ $\forall\, t \in I$, $\exists\, k(t) \in \mathbb{Z}$

$\tilde{\phi}(t) = \phi(t) + 2k(t)\pi$

$k(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\tilde{\phi}(t) - \phi(t)\right)$ συνεχής και σταθερή

Από το λήμμα $\exists$ γωνιακή συνάρτηση $\phi: I \to \mathbb{R}$

C^1: τέτοια ώστε $\dot{x}(s) = \cos\phi(s)$, $\dot{y}(s) = \sin\phi(s)$

Ορισμός

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη με φυσική παράμετρο $s \in I$. Καλούμε καμπυλότητα αυτής της συνάρτησης $k: I \to \mathbb{R}$, με
$k(s) = \frac{d\varphi}{ds}(s) = \dot{\varphi}(s)$ όπου $\varphi: I \to \mathbb{R}$ είναι C^1 συνάρτηση ώστε

$$\dot{c}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s)) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$$

<u>Είναι η καμπυλότητα γεωμετρική έννοια;</u>

Έστω $c: I \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ λεία καμπύλη με φυσική παράμετρο $s \in I$ που $\tilde{c}: I \to \mathbb{R}$ γεωμετρικώς ισότιμη της c, δηλαδή $\tilde{c} = T \circ c$, $T \in Isom(\mathbb{R}^2)$
$T = T_v \circ A$, $T_* = A \in O(2)$

$$\frac{d\tilde{c}}{ds} = T_* \frac{dc}{ds} \Rightarrow \left\|\frac{d\tilde{c}}{ds}\right\| = \left\|T_* \frac{dc}{ds}\right\| = \left\|\frac{dc}{ds}\right\| = 1$$

$\Rightarrow$ s μήκος τόξου και για την $\tilde{c}$

$k, \tilde{k}$

Υπολογισμός Καμπυλότητας

$\dot{x}(s) = \cos\varphi(s)$, $\quad \dot{y}(s) = \sin\varphi(s)$

$\ddot{x}(s) = \dot{\varphi}(s)\sin\varphi(s) = -k(s)\cdot y(s)$

$\ddot{y}(s) = \dot{\varphi}(s)\cos\varphi(s) = k(s)\, x(s)$

$$\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = k(\dot{x})^2 + k(\dot{y})^2 = k((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2)$$

Πρόταση

Η καμπυλότητα της καμπύλης $c(s) = (x(s), y(s))$ είναι η συνάρτηση

$$k = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle$$

$J = R_{\frac{\pi}{2}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$

$J \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J(v_1, v_2) = (-v_2, v_1)$

$\dot{c} = (\dot{x}, \dot{y}) \Rightarrow J\dot{c} = (-\dot{y}, \dot{x})$

$\ddot{c} = (\ddot{x}, \ddot{y})$

$\dot{\tilde{c}} = T_x \cdot \dot{c} \qquad \ddot{\tilde{c}} = T_x \ddot{c}$

$\tilde{k} = \langle \ddot{\tilde{c}}, J\dot{\tilde{c}} \rangle = \langle T_x \ddot{c}, J T_x \cdot \dot{c} \rangle$

- $T_x = A = R_\theta \sim \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$J \cdot T_x = R_{\frac{\pi}{2}} \cdot R_\theta = R_{\frac{\pi}{2}+\theta} = R_{\theta+\frac{\pi}{2}} = R_\theta \cdot R_{\frac{\pi}{2}} = T_x \cdot J$

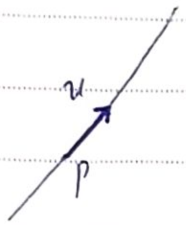
$J \cdot T_x = T_x \cdot J$ συνεπώς $\tilde{k} = \langle T_x \ddot{c}, T_x(J\dot{c}) \rangle = \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle \Rightarrow \boxed{\tilde{k} = k}$

- $T_x = K_\theta \sim \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

$J \cdot T_x \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = -T_x \cdot J$

$\boxed{\tilde{k} = -k}$

Παραδείγματα

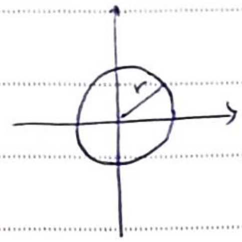
1) 

$c(t) = p + tv, \quad v \neq 0$

Επιλέγω $\|v\| = 1$

$c(s) = p + sv, \quad \dot{c}(s) = v \quad \ddot{c}(s) = 0$

$$k = \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle \Rightarrow \boxed{k = 0}$$



2) $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad c(t) = (r\cos t, r\sin t)$

$$c(s) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right)$$

$$x(s) = r\sin\frac{s}{r} \Rightarrow \dot{x}(s) = -\sin\frac{s}{r} \Rightarrow \ddot{x}(s) = -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}$$

$$y(s) = r\sin\frac{s}{r} \Rightarrow \dot{y}(s) = \cos\frac{s}{r} \Rightarrow \ddot{y}(s) = -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}$$

Άρα, η καμπυλότητα είναι $k(s) = \dot{x}(s)\ddot{y}(s) - \dot{y}(s)\ddot{x}(s)$

$$= \frac{1}{r}\sin^2\frac{s}{r} + \frac{1}{r}\cos^2\frac{s}{r} \Rightarrow \boxed{k(s) = \frac{1}{r}}$$

Σχόλιο: $c(s) \quad \tilde{s} = -s$

$c(\tilde{s}) \quad \frac{dc}{d\tilde{s}} = \frac{ds}{d\tilde{s}}\frac{dc}{dt} \Rightarrow \frac{dc}{d\tilde{s}} = -\frac{dc}{ds} = -\dot{c} \Rightarrow \tilde{s}$ μήκος τόξου

$$\frac{d^2c}{d\tilde{s}^2} = \frac{d}{d\tilde{s}}\left(\frac{dc}{d\tilde{s}}\right) = -\frac{d}{d\tilde{s}}(\dot{c}) = -\frac{ds}{d\tilde{s}}\frac{d\dot{c}}{ds} \Rightarrow \frac{d^2c}{d\tilde{s}^2} = \ddot{c}$$

$$\left\langle \frac{d^2c}{d\tilde{s}^2}, J\left(\frac{dc}{d\tilde{s}}\right) \right\rangle = -\langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle = -k$$

Καμπυλότητα κανονικών καμπυλών του $\mathbb{R}^2$ με τυχαία παράμετρο

Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ κανονική καμπύλη με παράμετρο $t \in I$.
Μήκος τόξου είναι η συνάρτηση $s: I \to \mathbb{R}$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| du, \quad \frac{ds}{dt} = \|c'\| > 0$$

$$s = s(t) \iff t = f(s) = t(s)$$

Η αναπαραμέτρηση της c με φυσική παράμετρο είναι η καμπύλη $\tilde{c} = c \circ f$,
$c(s) = \tilde{c}(s) = c(t(s))$.
Η καμπύλη $\tilde{c}: J \to \mathbb{R}$ έχει καμπύλη $\tilde{k}: J \to \mathbb{R}$, $\tilde{k} = \langle \ddot{\tilde{c}}, J\dot{\tilde{c}} \rangle$

Ορισμός

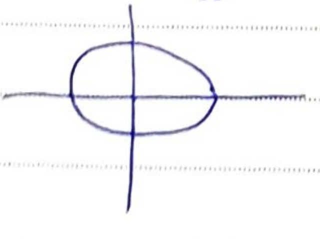
Ονομάζω καμπυλότητα της κανονικής καμπύλης $c: J \to \mathbb{R}^2$ με παράμετρο t της συνάρτησης $k: J \to \mathbb{R}$ $k = \bar{k} \circ s$, $k(t) = \bar{k}(s(t))$

Παράδειγμα

$c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $a, b > 0$ είναι λεία με διάνυσμα ταχύτητας
$c'(t) = (-a\sin t, b\cos t) \neq (0,0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$
Άρα, είναι κανονική.

Το μήκος τόξου είναι η συνάρτηση $s: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s(t) = \int_0^t \|c'(u)\| du$

ή $s = s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2\sin^2 u + b^2 \sin u}\, du$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Υπολογισμός καμπυλότητας σε τυχαία παράμετρο:

$$k = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \dot{x} = \frac{dt}{ds}x'$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \dot{y} = \frac{dt}{ds}y'$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dt}{ds}x'\right) = \frac{d^2t}{ds^2}x' + \frac{dt}{ds}\frac{dx'}{ds} =$$

$$= \frac{d^2t}{ds^2}x' + \frac{dt}{ds}\frac{dt}{ds}\underbrace{\frac{dx'}{dt}}_{=x''}$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2t}{ds^2}x' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 x''$$

Όμοια, $\ddot{y} = \frac{d^2t}{ds^2}y' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 y''$

$$k = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = \frac{dt}{ds}x'\left(\frac{d^2t}{ds^2}y' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 y''\right) - \frac{dt}{ds}y'\left(\frac{d^2t}{ds^2}x' + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 x''\right) =$$

$$= \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 (x'y'' - y'x'')$$

$$\frac{ds}{dt} = \|c'\| \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|c'\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad c' = (x', y')$$

Πρόταση

Η καμπυλότητα κανονικής καμπύλης $c(t)=(x(t),y(t))$ και παράμετρο $t\in I$ είναι $k=\frac{x'y''-y'x''}{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}=\frac{\langle c'', Jc'\rangle}{\|c'\|^3}$

Συνέχεια προηγούμενου παραδείγματος

$c(t)=(a\cos t, b\sin t),\ t\in\mathbb{R}$

$x(t)=a\cos t,\quad x'(t)=-a\sin t \quad x''(t)=-a\cos t$

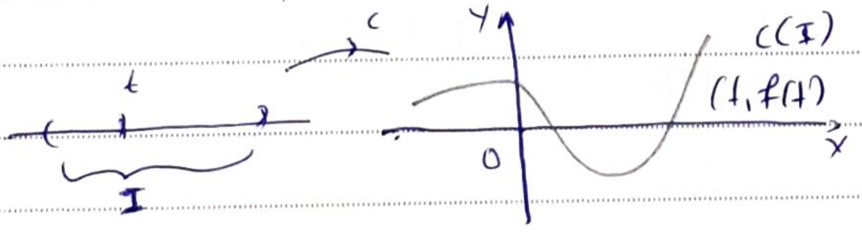
$y(t)=b\sin t,\quad y'(t)=b\cos t,\quad y''(t)=-b\sin t$

Άρα, η καμπυλότητα είναι η συνάρτηση

$k:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ k(t)=\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}}$

Καμπύλες Γραφήματα

Έστω $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ λεία. Θεωρούμε την καμπύλη γράφημα ως προς τον Ox $c: I\to\mathbb{R}^2,\ c(t)=(t,f(t))$



$x'(t)=1 \qquad x''(t)=0$

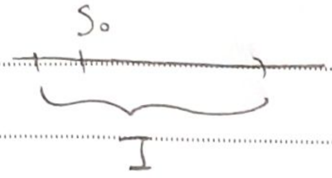
$y'(t)=f'(t) \qquad y''(t)=f''(t)$

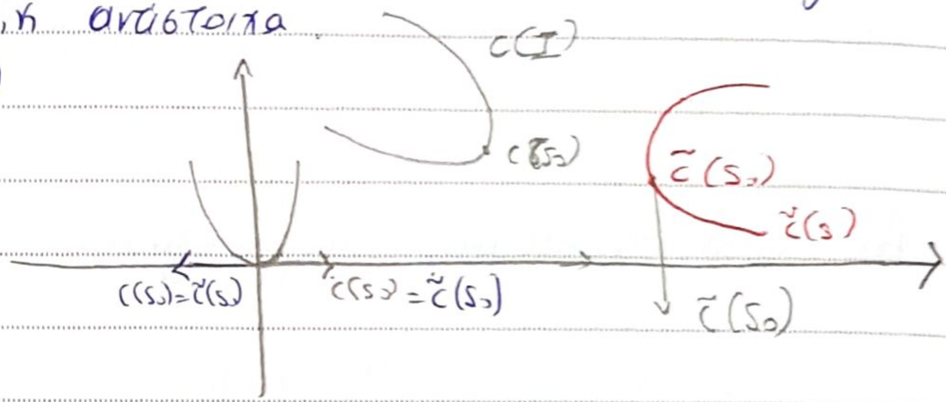
$k(t)=\frac{f''(t)}{\sqrt{1+(f'(t))^2}^{\,3}}$

Γεωμετρική Ερμηνεία της Καμπυλότητας

Θεωρώ καμπύλη $c, \tilde{c} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$ με καμπυλότητες $k, \tilde{k}$ αντίστοιχα.

Υποθέτω ότι $k(s_0) > \tilde{k}(s_0)$





$c(s_0) = (0,0) \qquad \dot{c}(s_0) = (1,0)$

$\tilde{c}(s_0) = (0,0) \qquad \dot{\tilde{c}}(s_0) = (1,0)$

Προφανώς κοντά στο $(0,0)$ οι καμπύλες είναι καμπύλες γραφήματα

$c(t) = (t, f(t)) \qquad \tilde{c}(t) = (t, \tilde{f}(t)) \quad , \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$f, \tilde{f} \; (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$

$c(0) = (0,0) = \tilde{c}(0) \Rightarrow \boxed{f(0) = 0 = \tilde{f}(0)}$

$c'(0) = (1, f'(0)) \qquad \tilde{c}'(0) = (1, \tilde{f}'(0)) \qquad \Rightarrow \boxed{f'(0) = 0 = \tilde{f}'(0)}$

$$k(s_0) > \tilde{k}(s_0) \Leftrightarrow \frac{f''(0)}{\sqrt{1+(f'(0))^2}^{\,3}} > \frac{\tilde{f}''(0)}{\sqrt{1+(\tilde{f}'(0))^2}^{\,3}} \Leftrightarrow f''(0) > \tilde{f}''(0)$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $g = f - \tilde{f} \; (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, $g''(0) > 0$

$\Rightarrow$ Η g παρουσιάζει στο 0 γνήσιο τοπικό ελάχιστο $\forall t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ είναι

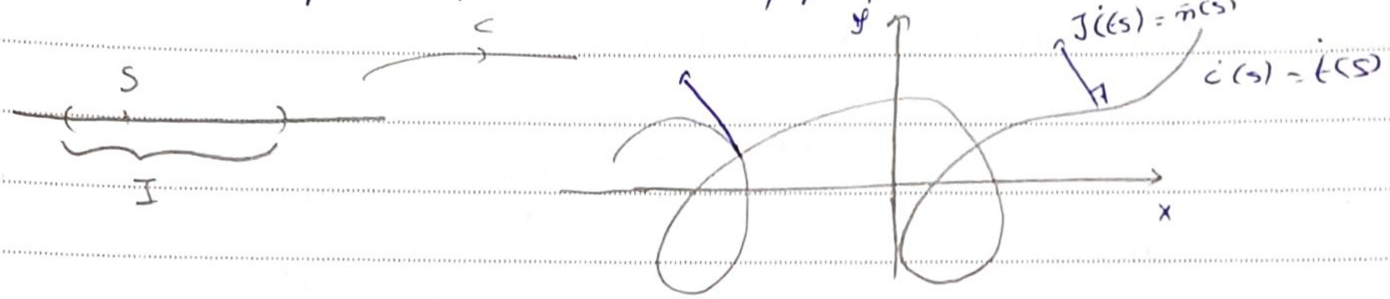
$g(t) > g(0) = 0 \quad t \neq 0 \quad \Rightarrow \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) - \{0\}, \quad f(t) > \tilde{f}(t)$

Ορισμός

$(V^n, \langle,\rangle)$ Μια βάση $\{v_1, \ldots, v_n\}$ του V καλείται ορθομοναδιαία ως προς το $\langle,\rangle$ αν-ν $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$

Σημαντική Παρατήρηση: $\forall\, v \in V'$ ισχύει $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v$

$c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη με φυσική παράμετρο $s \in I$, $\|\dot{c}(s)\| = 1$



Το διάνυσμα $\vec{n}(s) = J\dot{c}(s)$ καλείται κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα της c στο s, ενώ το $\vec{t}(s) = \dot{c}(s)$ καλείται μοναδιαίο εφαπτ. διάνυσμα
Η ορθοκανονική βάση $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s)\}$ καλείται πλαίσιο frenet της c

$$\dot{\vec{t}}(s) = \langle \dot{\vec{t}}(s), \vec{t}(s) \rangle \vec{t}(s) + \langle \dot{\vec{t}}(s), \vec{n}(s) \rangle \vec{n}(s)$$

$$\dot{\vec{n}}(s) = \langle \dot{\vec{n}}(s), \vec{t}(s) \rangle \vec{t}(s) + \langle \dot{\vec{n}}(s), \vec{n}(s) \rangle \vec{n}(s)$$

$$\langle \vec{t}(s), \vec{t}(s) \rangle = 1 \Rightarrow 2\langle \dot{\vec{t}}(s), \vec{t}(s) \rangle = 0$$
$$\langle \vec{n}(s), \vec{n}(s) \rangle = 1 \Rightarrow 2\langle \dot{\vec{n}}(s), \vec{n}(s) \rangle = 0$$

$V, W: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $\quad \langle V, W \rangle : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\langle V, W \rangle' = \langle V', W \rangle + \langle V, W' \rangle$$

$$\langle \dot{\vec{t}}(s), \vec{n}(s) \rangle = \langle \ddot{c}(s), J(\dot{c}(s)) \rangle = k(s)$$
$$\langle \dot{\vec{n}}(s), \vec{t}(s) \rangle = \langle \vec{n}(s), \vec{t}(s) \rangle^{\cdot} - \langle \vec{n}(s), \dot{\vec{t}}(s) \rangle = -k(s)$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{t}} = \kappa \vec{n} \\ \dot{\vec{n}} = -\kappa \vec{t} \end{cases}$$: εξισώσεις Frenet

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{t}} \\ \dot{\vec{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \end{pmatrix}$$

Πλαίσιο Frenet για τυχαία παράμετρο

$c(t)$ $\quad \vec{t} = \dot{c} = \frac{dc}{ds} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{dc}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{t}(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}}$

$\vec{n} = J\vec{t} \Rightarrow \boxed{\vec{n}(t) = \frac{Jc'(t)}{\|c'(t)\|}}$

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| \, du$$

$$\frac{ds}{dt} = \|c'\| \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|c'\|}$$